

4. СТАТИКА

Теория

Есептерді шығару мысалдары мен әдістемелік нұсқаулар

Өз бетімен шығаруға арналған есептер

Теория

Механикалық жүйенің тепе-теңдік жағдайы екі шартпен анықталады:

- тыныштықтағы жүйеге әсер ететін сыртқы күштердің қосындысы нөлге тең (массалар центрінің тыныштық күйінің сақталуына кепілдік береді):

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = 0; \quad (4.1)$$

- жүйеге әсер ететін сыртқы күштердің моменттерінің қосындысы нөлге тең (қандай да бір оське қатысты айнарудың жоқ екеніне кепілдік береді):

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{M}_i = 0; \quad (4.2)$$

(4.1)-шарттың орындалуы кезінде сыртқы күштердің қосынды моменті координата басын таңдап алғанға байланысты емес екендігін көрсетейік.

Қайсыбір нүктеге қатысты сыртқы күштердің моменті

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \times \mathbf{r}_i \quad (4.3)$$

Қайсыбір \mathbf{a} векторға ығысқан басқа нүктеге қатысты сыртқы күштердің моменті

$$\mathbf{M}' = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \times \mathbf{r}'_i. \quad (4.4)$$

$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \mathbf{a}$ шартын қолдана отырып, келесіні аламыз:

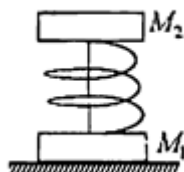
$$\mathbf{M}' = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \times \mathbf{r}'_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \times \mathbf{a}. \quad (4.5)$$

(4.1) шартына сәйкес (4.5) теңдіктің оң жағындағы екінші қосылғыш нөлге айналады және (4.5) өрнек (4.3)-теңдеумен сәйкес келеді. Егер де (4.1) шартының орындалуына көз жеткізсек, онда (4.2) шартының қандай да бір нүктеге қатысты орындалатынын талап ете аламыз.

Айтарлықтай күрделі есеп – тепе-теңдіктің тұрақтылығын немесе тұрақсыздығын түсіну. Егер де тепе-теңдік тұрақты болса, онда оның бұзылуы жүйені тепе-теңдікке жағдайына қайтарушы күштердің туындауына әкеледі.

Есептерді шығару мысалдары мен әдістемелік нұсқаулар

4.1. Қатаңдығы k салмақсыз серіппенің еркін күйдегі ұзындығы l_0 . Серіппеге ұзындығы l ($l < l_0$) жіппен байланысқан екі дене бекітілген. Денелер 4.1-суретте көрсетілгендей орналасқан. Денелердің массалары M_1 және M_2 . Қандай да бір моментте жіпті кеседі. l -дің қандай мәнінде төменгі дене жерден ажырап бөлінеді?



4.1-сурет.

Шешімі: Жіп үзілгеннен кейін жоғарғы дене серіппенің серпімді деформациясы күшінің әсерінен гармониялық тербелістер жасайды. Осы тербелістер кезінде серіппенің ұзындығы соншалықты созылып, нәтижесінде керілу күші төменгі дененің ауырлық күшінен асып түседі.

Тербелістер жоғарғы дененің тепе-теңдік жағдайына қатысты қандай да A амплитудамен жүреді. Тепе-теңдік жағдайында серіппенің l_1 ұзындығы мәнінде серпімді деформация күші жоғарыдағы дененің салмағына тең болады:

$$k(l_0 - l_1) = M_1 g,$$

яғни $l_1 = l_0 - M_1 g / k$.

Жоғарыда орналасқан дененің тербелістер амплитудасын серіппенің бастапқы ұзындығы мен тепе-теңдік жағдайындағы ұзындығының айырмасы ретінде табуға болады:

$$A = l_1 - l = l_0 - l - M_1 g / k.$$

Жоғарыдағы дененің тербелістері кезінде серіппенің максималды ұзындығы мынаған тең:

$$l_{\max} = l + 2A = 2l_1 - l = 2l_0 - l - 2M_1 g / k.$$

Егер $M_2 g \leq k \Delta l$ теңсіздігі орындалғанда, төменгі дене жерден үзіледі, мұндағы Δl - серіппенің созылуы. Серіппенің максималды ұзаруы:

$$(\Delta l)_{\max} = l_{\max} - l_0 = l_0 - l - 2M_1 g / k.$$

Егер келесі шарт орындалса, онда төменде орналасқан дене жерден үзіледі:

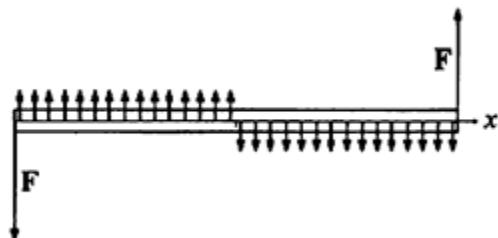
$$M_2 g \leq k (\Delta l)_{\max} = k(l_0 - l) - 2M_1 g$$

Осыдан серіппенің бастапқы ұзындығының шарты шығады:

$$l \leq l_0 - (M_2 + M_1) g / k.$$

4.2. Еденде массасы m біртекті ұзын жіңішке тақтайша жатыр. Тақтайша мен еденнің арасындағы үйкеліс коэффициенті μ . Тақтайша бойымен оның ұштарына шамасы бойынша тең және қарама-қарсы бағытталған горизонталь екі күш түсірілген. l -дің қандай мәнінде тақтайша бұрыла бастайды?

Шешімі: Еденнің реакция күші тақтайша бойымен біркелкі таралған, сондықта сәйкесінше үйкеліс күші 4.2-суретте көрсетілгендей таралады.



4.2-сурет.

Тақтайша бұрыла бастау үшін тақтайша центріне қатысты Fl -ге тең F күштер моменті мүмкін максимал болатын үйкеліс күші моментінен көп болуы тиіс. Тақтайшаның Δx бөлігі үйкеліс күші моментіне үлес тудырады:

$$\Delta M = \mu x g \Delta m = \mu x g \Delta x \frac{m}{l},$$

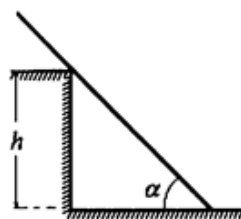
мұндағы x - тақтайдың центрінен Δx бөлігіне дейінгі ара-қашықтық. Тақтайшаның барлық бөліктерінің үйкеліс күштері моментіне үлестерін қосып, үйкеліс күштерінің толық моментін аламыз:

$$\Delta M = \mu m g l / 4.$$

Моменттердің теңдігі шартынан тақтайша бұрыла бастайды кездегі күштің мәнін табамыз.

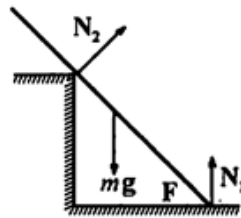
$$F = \mu m g / 4.$$

4.3. Ұзындығы l біртекті өзекше еден мен баспалдаққа сүйеніп тұр (4.3-сурет). Өзекше мен еденнің арасындағы үйкеліс коэффициенті $\mu = 1$, өзекше мен баспалдық арасында үйкеліс жоқ. Егер $\alpha = \pi / 4$ болса, онда баспалдақтың қандай биіктігінде өзекше тепе-тең жағдайда болады?



4.3-сурет

Шешімі: Өзекшеге мынандай күштер әсер етеді (4.4-сурет): mg ауырлық күші, еденнің реакция күші N_1 , баспалдақтың реакция күші N_2 , горизонталь бағытталған $F_{үйк}$.



4.4-сурет

Егер өзекше тыныштықта болса, онда оған түсірілген күштердің қосындысы нөлге тең:

$$mg + N_1 + N_2 + F_{y\ddot{u}k} = 0.$$

Бұл векторлық теңдікті горизонталь және вертикаль бағыттарға проекцияласақ, онда келесіні аламыз:

$$F_{y\ddot{u}k} - N_2 \sin \alpha = 0, \quad (4.3.1)$$

$$-mg + N_1 + N_2 \cos \alpha = 0. \quad (4.3.2)$$

$\alpha = 45^\circ$ және $\sin \alpha = \cos \alpha = 1/\sqrt{2}$ екенін ескерсек, онда (4.3.1) және (4.3.2) теңдіктер мына түрге ие болады:

$$F_{y\ddot{u}k} = \frac{1}{\sqrt{2}} N_2,$$

$$mg = N_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} N_2.$$

Өзекше тепе-теңдікте болғанда еркін түрде таңдап алынған нүктеге қатысты осы күштердің моменттерінің қосындысы да нөлге тең болуы тиіс. Өзекшенің сол ұшына қатысты моменттерді қарастыра келе мынаны аламыз:

$$\frac{mgl}{2\sqrt{2}} - \sqrt{2}hN_2 = 0.$$

Осыдан

$$N_2 = \frac{mgl}{4h}. \quad (4.3.3)$$

(4.3.1.)-(4.3.3) теңдеулер жүйесінен табамыз:

$$F_{y\ddot{u}k} = \frac{mgl}{4\sqrt{2}h}, \quad N_1 = mg \left(1 - \frac{l}{4\sqrt{2}h} \right).$$

Тепе-теңдік жағдайда құрғақ үйкеліс күші $F_{үйк} \leq \mu N_1 = N_1$ (өйткені $\mu = 1$) екенін ескере отырып, өзекшенің тепе-теңдік шартын келесі түрде аламыз:

$$\frac{mgl}{4\sqrt{2}h} \leq mg \left(1 - \frac{l}{4\sqrt{2}h} \right).$$

Бұл теңсіздікке келесі эквивалентті болады:

$$h \geq \frac{l}{2\sqrt{2}}.$$

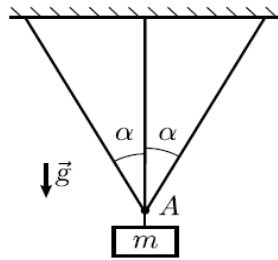
Басқа жағынан, тепе-теңдік жағдайда әрқашан

$$h \leq l \sin \alpha = l / \sqrt{2}.$$

Сонымен, өзекшенің тепе-теңдігі баспалдақ биіктігі үшін келесі теңсіздік орындалғанда мүмкін болады:

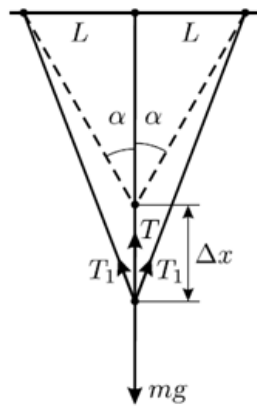
$$\frac{l}{2\sqrt{2}} \leq h \leq \frac{l}{\sqrt{2}}.$$

4.4. Үш бөліктен тұратын трос A нүктесінде жалғанған (4.5-сурет). Олардың барлығы бір жазықтықта жатыр, түзу және керілмеген. Шеткі және ортаңғы бөліктері арасындағы бұрыш α -ға тең. A нүктесіне массасы m жүк ілінген. Тростың ортаңғы бөлігіндегі T керілу күшін табыңыз. Тростың ұзаруы өте кіші.



4.5-сурет

Шешімі: T және T_1 - ортаңғы және шеткі бөліктерінің сәйкесінше керілу күштері болсын делік, Δx және Δx_1 - ортаңғы және шеткі бөліктерінің ұзаруы, E және S - тросстың Юнг модулі мен көлденең қимасының ауданы, L - аспаның шеткі және ортаңғы бөліктерінің іліну нүктелері арасындағы қашықтық (4.6-сурет).



4.6-сурет

Косинус теоремасын пайдаланып, трос бөліктерінің ұзарулары арасындағы байланысты табамыз:

$$\left(\frac{L}{\sin \alpha} + \Delta x_1 \right)^2 = \Delta x^2 + \frac{L^2}{\sin^2 \alpha} + 2\Delta x \frac{L}{\sin \alpha} \cos \alpha.$$

Осыдан, өте кіші ұзарулардың квадраттарын олардың бірінші дәрежелерімен салыстырғанда елемеу арқылы келесіні аламыз: $\Delta x_1 \approx \Delta x \cos \alpha$.

Олай болса, Гук заңына сәйкес

$$T = ES \cdot \frac{\Delta x}{L / \operatorname{tg} \alpha} = \frac{ES \Delta x \sin \alpha}{L \cos \alpha},$$

$$T_1 = ES \cdot \frac{\Delta x_1}{L / \sin \alpha} = \frac{ES \Delta x \cos \alpha \sin \alpha}{L}.$$

осыдан $T_1 = T \cos^2 \alpha$.

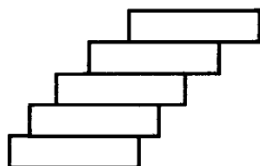
Жүк тыныштықта болғандықтан оған әсер ететін барлық күштердің қосындысы нөлге тең. Осы шарттың вертикаль оське қатысты проекциясын жазамыз:

$$T + 2T_1 \cos \alpha = mg.$$

Осыған T_1 үшін өрнекті қойып жазсақ, жауабын аламыз:

$$T = \frac{mg}{1 + 2\cos^3 \alpha}.$$

4.5. Бес кірпішті 4.7-суреттегідей бір-бірінен үстіне қояды. Ең жоғарғы жатқан кірпіштің оң шеті ең төменгі кірпіштің оң шетінен қандай ең үлкен ара-қашықтыққа шығыңқы шыға алады?

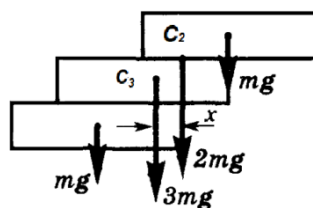


4.7-сурет

Шешімі: Кірпішті жоғарыдан төменге қарай санаймыз. Әрбір кірпіштің ауырлық центрі шеттен $l/2$ қашықтықта тұр, сондықтан бірінші кірпіш екінші кірпіштің шетінен $l/2$ қашықтықтан артық болмайтындай шығып тұруы тиіс. Онда екі жоғары кірпіштердің жалпы ауырлық центрі C_2 екінші кірпіштің шетінен горизонталь бойынша $l/4$ ара – қашықтықта орналасқан. Мұндай қашықтыққа да екінші кірпіш үшінші кірпіштің шетінен шығып тұруы мүмкін (4.8-сурет).

Үш жоғарғы кірпіштердің ауырлық центрі C_3 келесі шарттан анықталады:

$$mg\left(\frac{l}{2} - x\right) = 2mgx$$



4.8-сурет.

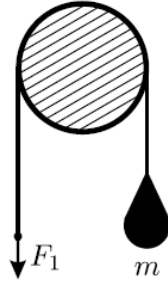
Осыдан $x = \frac{l}{6}$, яғни үшінші кірпіш төртінші кірпіштің шетінен өзінің ұзындығының $\frac{1}{6}$ -не шығыңқы бола алады. Ұқсас түрде есептеулер жүргізсек, төртінші кірпіштің бесінші кірпіштің шетінен өзінің ұзындығының $\frac{1}{8}$ -не шығыңқы бола алады. Ең жоғарғы кірпіштің ең төменгі кірпішке қатысты толық ығысуы келесі құрайды:

$$\frac{l}{2} + \frac{l}{4} + \frac{l}{6} + \frac{l}{8} = \frac{25l}{24}$$

Яғни ең жоғарғы кірпіш өзінің тірек ауданының шекарасынан толығымен шығуы мүмкін.

Өз бетімен шығаруға арналған есептер

4.6. Қозғалмайтын горизонталь бекітілген бөрене арқылы арқан асыра лақтырылды (4.9-сурет). Бұл арқанға ілінген массасы $m = 6$ кг денені ұстап тұру үшін арқанның екінші ұшын ең аз күшпен F_1 тарту керек?

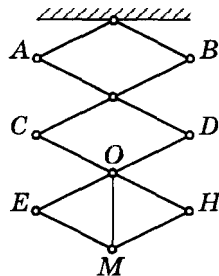


4.9-сурет.

4.7. Арқан тартыста екі адам оның ұштарын үлкен F күшімен қарама-қарсы жаққа тартады. Ауырлық күшінің әсерінен арқанның көлденең горизонталь сызықтан иілуін табыңыз. Арқанның массасы m , ұзындығы L , күші $F \gg mg$.

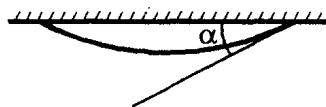
4.8. Диаметрі $d = 10$ мм түтікше жұқа болат таспадан жасалған. Егер $F = 20000$ Н бойлық күшті әрекет еткенде түтікше жарылса, онда ол қандай ішкі қысымды ұстау алады? Түтікшедегі тігіс түтік материалымен бірдей жарылу беріктігіне ие күшіне ие деп есептеңіздер.

4.9. Топсалы түрде байланысқан өзекшелерден тұратын аспа берілген (4.10-сурет). AD, BC, DE және CH өзекшелер тұтас. O және M нүктелері арасындағы жіп керілген. Егер бүкіл жүйенің массасы m –ге тең болса, онда OM жіптің T керілу күшін анықтаңыздар.



4.10-сурет.

4.10. Массасы m шынжыр төбеге ілінген. (4.11-сурет). Шынжырдың ең төменгі нүктесіндегі керілу күші шынжырдың салмағына тең болу үшін α бұрыш қандай болады? Іліну нүктесіндегі T керілу күшін анықтаңыздар.



4.11-сурет.